

具有阻带零点抑制的三带双正交内插复子波

水鹏朗, 保 铮

(西安电子科技大学雷达信号处理重点实验室, 陕西西安 710071)

摘要: 作为设计两带双正交滤波器组和子波的有效方法, 提升方法(Lifting Scheme)已广泛应用于子波构造、自适应子带编码等众多领域. 本文利用三带提升方法构造了一类具有阻带零点抑制的三带双正交复内插子波. 阻带零点抑制是比消失矩约束更为严格的设计条件, 能够更有效地控制滤波器的阻带特性. 不同于传统的滤波器组, 这类复滤波器组和子波具有分割正负频率分量在不同通道的能力.

关键词: 三带提升方法; 三带双正交内插子波; 阻带零点抑制

中图分类号: TN391 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2003) 06-0832-05

Three-Band Interpolating Complex Wavelets with Stopband Zero Suppression

SHUI Penglang, BAO Zheng

(Key Lab for Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China)

Abstract: As an efficient methodology to design biorthogonal filterbanks and wavelets, the lifting scheme has been widely applied to many fields such as construction of wavelets and design of adaptive subband coders. Utilizing the three-band lifting scheme, the paper designs a novel family of biorthogonal interpolating complex wavelets with stopband zero suppression. The stopband zero suppression is a stricter design constraint than the vanishing moments, and can more effectively manipulate the stopband characteristics of filters. Unlike the traditional design, complex filterbanks and wavelets designed provide the ability to partition the positive and negative frequency components into different channels/subbands.

Key words: three-band lifting scheme; three-band biorthogonal interpolating complex wavelets; stopband zero suppression

1 引言

近二十多年来, 人们已经提出了很多子波和滤波器组的构造方法. 这些方法提供了丰富的子波类型和子波基, 两带子波基尤其丰富, 如紧支撑正交子波^[1]、半正交子波^[2,3]、双正交子波^[4,5]、递归滤波器组^[6]和平移正交子波等^[7]. 这些子波基的构造大多采用了频域设计方法. 1995年, Sweldens^[8,9]提出了一种新的时域设计方法))) 提升方法. 这种设计方法在结构化设计和自适应设计方面的突出优点弥补了传统频域设计方法的不足. 它的优势体现为以下三点: (1) 可以从一些简单子波系统设计具有期望性质的子波系统, 提升滤波器的选择不影响双正交性; (2) 设计自适应滤波器组时, 约束规划被简化为无约束规划^[11-13]; (3) 灵活的边界处理模式, 易于构造区间子波^[14]. 类似的思想也出现在其他文献中, 如文[9]中建立的一般数据表示框架, 文[10]中的二维流形上的多分辨分析等. 这些应用以两带子波和滤波器组的设计为主. 文献[15]建立了多维多带提升方法, 三带提升方法是它的特例之一.

本文研究了用三带提升方法构造具有阻带零点抑制的复内插滤波器组和子波. 子波设计中, 传统设计约束))) 消失矩

保证了高通滤波器在低频区的衰减. 对两带滤波器组实质上保证了在整个阻带的衰减, 是一种有效的设计约束. 但对三带情况, 消失矩没法保证整个阻带的衰减, 为此我们引入了一种新的设计约束))) 阻带零点抑制: 一个比消失矩更强的设计约束, 能够保证高通滤波器整个阻带上的衰减. 利用三带提升方法, 我们构造了一类新的三带内插复滤波器组和子波, 它们满足阻带零点抑制设计约束并且具有简洁的表达形式. 另外, 不同于传统的滤波器组, 本文设计的三带复滤波器组由一个低通通道, 一个在正高频区的高通通道和一个在负高频区的高通通道构成, 因而具有把复信号中正负频率分量分割在不同通道的优点. 这对雷达和声纳信号处理是有益的, 在这类应用中, 正负的 Doppler 频率具有不同的物理含义.

2 三带提升方法

为描述上简洁, 我们采用多相位矩阵的演变来描述三带提升方法, 三带提升方法是两带提升的一个直接推广. 提升过程如图.1所示, 整个提升过程分为3步, 每步中一个通道被另外两个通道的输出修正. 它可以看成两带提升的直接推广和多带提升^[15]的一个特例. 当然, 对于三带提升, 也可以考虑

其他的提升模式,本文仅讨论图 1 所示的提升模式.

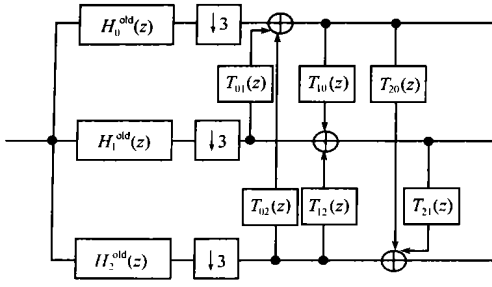


图 1 三带提升过程流程图

定义 1 设 {h_i^dd, i = 0, 1, 2} 和 {g_i^dd, i = 0, 1, 2} 构成一个三带 FIR 双正交滤波器组, H_0(z) 和 G_0(z) 是它们的多相位矩阵, 三带提升可以被描述如下:

$$H_{new}(z) = T_2(z) T_1(z) T_0(z) H_{old}(z) \tag{1}$$

$$G_{new}(z) = S_2(z) S_1(z) S_0(z) G_{old}(z)$$

$$T_0(z) = \begin{bmatrix} 1 & T_{01}(z) & T_{02}(z) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_1(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ T_{10}(z) & 1 & T_{12}(z) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T_2(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_{20}(z) & T_{21}(z) & 1 \end{bmatrix}, S_0(z) = 2I - T_0^H(z^{-1}),$$

$$S_1(z) = 2I - T_1^H(z^{-1}), S_2(z) = 2I - T_2^H(z^{-1})$$

$T_{ij}(e^{j\omega}) = \sum_n t_{ij}(n) e^{-jn\omega}$ 是复三角多项式, 滤波器 $t_{ij}(n)$ 称作提升滤波器, 上标 H 表示对矩阵中多项式系数取共轭和矩阵转置.

可以看出三带的提升过程完全由 3 对提升滤波器确定. 容易验证: $[S_i(z)]^H T_i(z) = I_3, i = 0, 1$ 和 2, 因此, $[G_{new}(z)]^H H_{new}(z) = I_3$. 三带提升是保持双正交性, 提升滤波器的选择不影响滤波器组的双正交性, 既可以通过选择合适的提升滤波器得到需要的滤波器组或子波, 也可以自适应选择提升滤波器得到三带自适应滤波器组.

3 具有阻带零点抑制的双正交内插复子波

子波变换用于连续时间信号处理时, 初始化是 DWT 不可或缺预处理. 简化预处理最直接方法是利用内插子波或内插多分辨分析, 内插性使得我们可以用连续时间信号的均匀采样代替计算投影系数的数值积分. 由于不存在两带的紧支撑正交内插子波, 双正交内插子波变得非常具有吸引力. 两带提升方法就是构造这类子波的有效工具之一^[9], 从两带/Lazy 子波 0 出发, 经过两带提升可以得到双正交内插子波. 下面利用三带提升, 用三带/Lazy 子波 0 作为初始滤波器组, 我们来构造三带双正交内插子波. 严格地说, 三带/Lazy 子波 0 不是传统意义上的子波, 仅是一个完全重构的多速率采样系统, 其滤波器组的 z 变换如下:

$$H_0^{Lazy}(z) = G_0^{Lazy}(z) = 1$$

$$H_1^{Lazy}(z) = G_1^{Lazy}(z) = z^{-1} \tag{2}$$

$$H_2^{Lazy}(z) = G_2^{Lazy}(z) = z^{-2}$$

/Lazy 子波 0 的多相位矩阵是单位阵, 用它作为初始滤波器组, 经过三带提升后, 得到的新滤波器组的 z 变换如式 (3) 所示:

$$\begin{bmatrix} H_0(z) \\ H_1(z) \\ H_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + z^{-1} T_{01}(z^3) + z^{-2} T_{02}(z^3) \\ z^{-1} + T_{10}(z^3) H_0(z) + z^{-2} T_{12}(z^3) \\ z^{-2} + T_{20}(z^3) H_0(z) + T_{21}(z^3) H_1(z) \end{bmatrix} \tag{3}$$

显然, $h_0(3n) = D(n), D(0) = 1, P \neq X \neq 0, D(n) = 0$, 尺度滤波器是内插滤波器. 对偶滤波器组的 z 变换如式 (6) 所示:

$$\begin{bmatrix} G_0(z) \\ G_1(z) \\ G_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [1 + \overline{T_{10}(z^{-3})} \overline{T_{01}(z^{-3})}] - z^{-1} \overline{T_{10}(z^{-3})} - \overline{T_{20}(z^{-3})} G_2(z) \\ z^{-1} + \overline{T_{10}(z^{-3})} - \overline{T_{21}(z^{-3})} G_2(z) \\ z^{-2} - [\overline{T_{02}(z^{-3})} - \overline{T_{12}(z^{-3})} \overline{T_{01}(z^{-3})}] - z^{-1} \overline{T_{12}(z^{-3})} \end{bmatrix} \tag{4}$$

在滤波器组设计中, 除了双正交性外, 滤波器组的频率响应也是一个重要的考虑指标. 在 M 带滤波器组和子波设计中, 人们利用正则阶和消失矩来控制滤波器组的频率特性、逼近阶和光滑性. 在两带情况, 前者决定了尺度滤波器的通带平坦性、阻带衰减和多分辨分析的逼近阶; 后者控制了高通滤波器的阻带衰减. 这些都是通过在特殊频率点约束高阶零点实现. 然而对 3 带以及更一般的 M 带 (M > 3) 滤波器组, K2 阶消失矩等价于 $w = 0$ 是子波滤波器的 K2 阶零点, 仅仅控制了低频区的衰减而不是整个阻带. 另外, 对于三带的复滤波器, 我们希望它们能够有效的处理复信号, 特别是希望它们能够分割正负频率分量在不同的通道里, 这点对雷达和声纳信号处理是重要的, 因为正 Doppler 频率和负 Doppler 频率具有不同的物理含义. 为此, 我们希望三带复滤波器组的幅频响应接近如图 2 所示的理想三带复滤波器组. 在图 2 中 H_0 是低通滤波器, H_1 在正频率区域的高通滤波器, H_2 是在负频率区域的高通滤波器. 然而, FIR 滤波器不能达到这样的

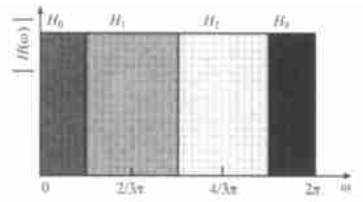


图 2 理想的三带复滤波器组的频率响应

频率响应, 为此, 对 H_1 我们通过在 $X = 0, 4P/3$ 强制高阶零点抑制低频分量和负高频分量; 对 H_2 通过在 $X = 0, 2P/3$ 强制高阶零点抑制低频分量和正高频分量. 我们称这一设计约束为阻带零点抑制 (Stopband Zero Suppression).

定义 2 (阻带零点抑制) 一个三带滤波器组 (H_0, H_1, H_2) 是 K 阶正则和 K 阶阻带零点抑制的, 如果它的频率响应满足: 对于 $k = 0, 1, \dots, K-1$ 和 $p = 0, 1, 2$

$$H_0^{(k)}(\frac{2p}{3}) = cD(p)D(k)$$

$$H_1^{(k)}(0) = H_1^{(k)}(\frac{4}{3}P) = 0, H_1(\frac{2}{3}P) \neq 0 \tag{5}$$

$$H_2^{(k)}(0) = H_2^{(k)}(\frac{2}{3}P) = 0, H_2(\frac{4}{3}P) \neq 0$$

c 是一个非零常数, $H^{(k)}(X)$ 表示 $H(X)$ 对 X 的 k 阶导数.

我们知道, 两带的内插滤波器组可以用 Dubuc 滤波器或 Langrange 插值公式给出简洁的表达形式. 那么, 具有阻带零点抑制的三带内插复滤波器是否也有类似的简洁表达式呢? 这对滤波器组的设计和分析非常关键. 下面的两个定理很好地回答了这一问题. 首先, 我们引入提升滤波器矩的概念. 定义提升滤波器的 k 阶矩为:

$$v_{ij}(k) = \sum_n t_{ij}(n) n^k \quad (6)$$

提升滤波器的矩和它在一些特殊频率点上的导数密切相关, 在后面两个定理的证明中将用到这一重要关系.

定理 1 式(3)中的内插滤波器组 $\{H_0, H_1, H_2\}$ 是 K 阶正则和 K 阶阻带零点抑制的, 当且仅当提升滤波器的矩满足: 对 $k = 0, 1, 2, \dots, K-1$

$$\begin{aligned} v_{01}(k) &= (-\frac{1}{3})^k, v_{02}(k) = (-\frac{2}{3})^k \\ v_{10}(k) &= \frac{A^2}{3}(-\frac{1}{3})^k, v_{12}(k) = -A^2(-\frac{1}{3})^k \\ v_{20}(k) &= -\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^k, v_{21}(k) = \frac{A}{1-A^2}(\frac{1}{3})^k \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $A = \exp(j\frac{2}{3}P)$.

事实上, 条件式(7)也可以写成一个统一的表达式

$$v_{ij}(k) = H_j(\frac{i-j}{3})^k \quad (8)$$

H_j 是一组非零复常数. 定理 1 的证明在附录 1 中给出.

下面的定理 2 给出了对偶的性质, 即当滤波器组 $\{H_0, H_1, H_2\}$ 是 K 阶正则和 K 阶阻带零点抑制时, 对偶滤波器组具有同样的性质.

定理 2 当提升滤波器满足条件(7)时, 对偶滤波器 $\{G_0, G_1, G_2\}$ 是 K 阶正则和 K 阶阻带零点抑制的.

定理 2 的证明见附录 2. 因此三带内插复滤波器组的设计可以通过使提升滤波器满足(7)的线性方程组实现. 条件(7)同时保证了滤波器组和对偶满足正则性和阻带零点抑制设计约束. 另外, 从定理 1 和定理 2 的证明中, 我们可以看出两个高通滤波器在通带中心周围也是 K 阶平坦的.

推论 1 当提升滤波器满足条件(7)时, 高通滤波器 H_1, G_1 和 H_2, G_2 分别在通带中心 $X = \frac{2}{3}P$ 和 $\frac{4}{3}P$ 是 K 阶平坦的, 即对 $k = 1, 2, \dots, K-1$

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dX^k} |H_1(X)|^2 \Big|_{X=\frac{2}{3}P} &= \frac{d^k}{dX^k} |H_2(X)|^2 \Big|_{X=\frac{4}{3}P} = 0 \\ \frac{d^k}{dX^k} |G_1(X)|^2 \Big|_{X=\frac{2}{3}P} &= \frac{d^k}{dX^k} |G_2(X)|^2 \Big|_{X=\frac{4}{3}P} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

从两个定理的证明中, 我们可以得到四个滤波器在通带中心的 1 到 $K-1$ 阶导数的表达式, 然后利用两个函数乘积的二项式求导公式, 可以证明这个推论. 例如从 $H_1^{(k)}(\frac{2}{3}P) = (-j)^k(A^2-1), H_1^{(k)}(\frac{2}{3}P) = j^k(A^2-1),$

$$\frac{d^k}{dX^k} |H_1(X)|^2 \Big|_{X=\frac{2}{3}P} = \sum_{l=0}^k C_k^l H_1^{(l)}(\frac{2}{3}P) H_1^{(k-l)}(\frac{2}{3}P)$$

$$= |A^2-1|^2 \sum_{l=0}^k C_k^l (-j)^l (-j)^{k-l} = 0$$

4 三带双正交内插复滤波器组和子波的例子

按照定理 1, 提升滤波器满足式(7)或(8)的线性约束时, 式(3)和(4)的双正交插滤波器组满足 K 阶正则和 K 阶阻带零点抑制的设计约束. 我们考虑最短支撑的提升滤波器, 即支撑长度正好等于线性约束的数目 K , 不妨设支撑集为 $\{m, m+1, \dots, m+K-1\}$, 求解线性方程组, 得到提升滤波器为:

$$t_{ij}(n) = H_j \sum_{k=m}^{m+K-1} \frac{3k-i+j}{3(k-n)}, n = m, m+1, \dots, m+K-1 \quad (10)$$

这一结果是相当漂亮的. 表明了提升滤波器正好等于一个复常数 H_j 乘以三带 Dubuc 插值滤波器, 可以通过 Langrange 插值公式求得. Dubuc 滤波器在子方法(Subdivision Scheme)、两带内插子波中起着重要的作用. 一般情况下, 双正交内插滤波器组常常产生双正交内插子波系统, 子波基的光滑性与正则阶和尺度滤波器的频率响应有关. 为了使得子波基比较光滑, 提升滤波器 t_{ij} 的支集中心应接近插值点 $n = i$, 这样, 支撑集左端点应满足: $m = \lfloor -\frac{K-1}{2} - \frac{i-j}{3} \rfloor$, $\lfloor x \rfloor$ 表示最接近 x 的整数. 另外, 为便于分析滤波器组的频率响应, 对滤波器组进行如下得规范化处理:

$$\begin{aligned} H_0^*(X) &= \frac{1}{\sqrt{3}}H_0(X), G_0^*(X) = \sqrt{3}G_0(X), \\ H_1^*(X) &= H_1(X), G_1^*(X) = G_1(X), \\ H_2^*(X) &= \sqrt{3}H_2(X), G_1^*(X) = \frac{1}{\sqrt{3}}G_2(X). \end{aligned}$$

按照定理 1 和 2 中得证明过程, 规范化后得滤波器组的幅频响应在其通带中心具有相同的幅度 $\sqrt{3}$.

例如对于 $K = 4$ 规范化后滤波器组的频率响应如图 3 所示. 可以看出, 滤波器组具有较高的阻带旁瓣, 这是许多应用中不希望出现的. 导致这种结果的原因除了提升结构本身的限制外, 一个明显的原因是控制阻带特性的两个高阶零点距离较远, 因而在两个阻带零点之间的区域形成了阻带旁瓣. 进一步压低阻带旁瓣可以通过增加提升滤波器的长度用剩余的自由度实现. 方法包括: 数值优化法和附加零点法. 限于篇幅, 通过一个简单的例子演示以下附加零点法. 如图 3 所示, 对偶尺度滤波器在 $X = P$ 出现了阻带旁瓣, 为此通过加长提升滤波器导 t_{10} 在 $X = P$ 增加一个零点. 如图 4 所示, 对偶尺度滤波器的阻带旁

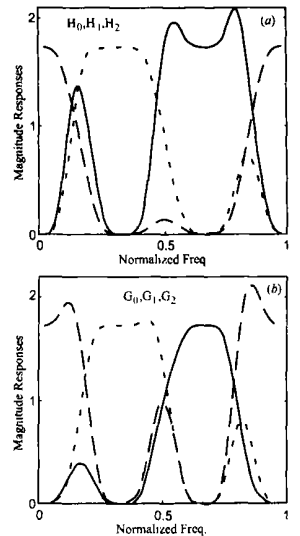


图 3 四阶双正交内插复滤波器组的幅频响应

在 $X = P$ 出现了阻带旁瓣, 为此通过加长提升滤波器导 t_{10} 在 $X = P$ 增加一个零点. 如图 4 所示, 对偶尺度滤波器的阻带旁

瓣被明显压低. 系统地讨论抑制阻带旁瓣仍是一个重要而有意义的问题.

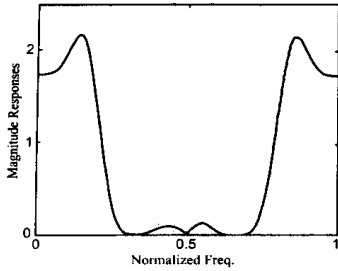


图 4 具有附加零点抑制的对偶低通滤波器

另外, 子波系统的光滑性也是一个重要设计指标, 子波系统的光滑性由尺度函数和对偶尺度函数的光滑性确定, 可以 Sobolev 指数^[16]描述. 对于上面设计的最短支撑的滤波器组, 相应子波的 Sobolev 指数如下: 对 $K=1, 2, 3$ 和 4 , 尺度函数的 Sobolev 指数分别是 $110, 210, 119087$ 和 217105 , 而对偶尺度函数的 Sobolev 指数分别是 $110, 110274, 017105$ 和 110211 . 对偶的低 Sobolev 指数主要由高阻带旁瓣引起. 例如如图 4 中低阻带旁瓣的对偶尺度函数 Sobolev 指数达到 210178 .

5 结论

利用三带提升方法, 本文设计了一类具有阻带零点抑制的双正交内插复滤波器组和子波. 不同于传统的滤波器组, 本文设计的三带复滤波器组由低通通道、正高通通道和负高通通道三个通道构成, 从而这样的子波系统具有分割正负频率分量在不通通道或子带的能力. 这对复信号的处理和一些应用是非常有用的. 并且给出了具有最短支撑的这类滤波器组的显式表达, 对压低阻带旁瓣的方法进行了初步的讨论. 阻带零点抑制是比消失矩更为有效的设计约束, 这一设计约束也可以用于三带实内插子波的设计.

附录 1: 定理 1 的证明

按照式(3), $H_0(X) = 1 + e^{-jX}T_{01}(e^{3jX}) + e^{-2jX}T_{02}(e^{3jX})$. 设 $A = \exp(j\frac{2P}{3})$, 由于

$$\left. \frac{d^k}{dX^k} T_{ij}(e^{3jX}) \right|_{0, \frac{2P}{3}, \frac{4P}{3}} = (-3j)^k v_{ij}(k)$$

我们有:

$$H_0^{(k)}(\frac{2qP}{3}) = D(k) + (-3j)^k A^{-q} \sum_{p=0}^k d_p^k [(\frac{1}{3})^p v_{01}(k-p) + A^q (\frac{2}{3})^p v_{02}(k-p)] \quad (11)$$

由 $K2$ 阶正则, 在 $\frac{2}{3}P, \frac{4}{3}P$ 处 $H_0(X)$ 直到 $K-1$ 阶导数为零, 因此对于 $k=1, \dots, K-1$

$$\begin{bmatrix} 1 & A \\ 1 & A^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{p=0}^k C_p^k (\frac{1}{3})^p v_{01}(k-p) \\ \sum_{p=0}^k C_p^k (\frac{2}{3})^p v_{02}(k-p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

由于系数矩阵非奇异, 方程组只有零解. 即对 $k=1, \dots, K-1$

$$\sum_{p=0}^k C_p^k (\frac{1}{3})^p v_{01}(k-p) = \sum_{p=0}^k C_p^k (\frac{2}{3})^p v_{02}(k-p) = 0$$

结合 $k=0$ 的情况(从那可以得到 $v_{01}(0) = v_{02}(0) = 1$), 得到对 $k=0, 1, \dots, K-1$

$$v_{01}(k) = (-\frac{1}{3})^k, v_{02}(k) = (-\frac{2}{3})^k \quad (12)$$

把式(12)带入式(11), 得到: 对 $k=0, 1, \dots, K-1, H_0^{(k)}(0) = 3D(k)$.

进一步, 当 $H_1(X)$ 是 K 阶阻带零点抑制时

$$H_1^{(k)}(0) = (-3j)^k [(\frac{1}{3})^{k+3} v_{10}(k) + \sum_{p=0}^k C_p^k (\frac{2}{3})^p v_{12}(k-p)] = 0$$

$$H_1^{(k)}(\frac{4P}{3}) = (-3j) A^{-2} [(\frac{1}{3})^k + A^{-2} \sum_{p=0}^k C_p^k (\frac{2}{3})^p v_{12}(k-p)] = 0$$

$$v_{10}(k) = \frac{1}{3}(A^2 - 1)(\frac{1}{3})^k, v_{12}(k) = -A^2(-\frac{1}{3})^k \quad (13)$$

进一步可以得到对 $k=0, 1, \dots, K-1, H_1^{(k)}(\frac{2}{3}P) = (-j)^k (A^2 - 1)$.

类似地, 由对 $k=0, 1, \dots, K-1, H_2^{(k)}(0) = H_2^{(k)}(\frac{2}{3}P) = 0$, 可以得到

$$v_{20}(k) = -\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^k, v_{21}(k) = \frac{A^2}{1-A^2}(\frac{1}{3})^k \quad (14)$$

$$H_2^{(k)}(\frac{4}{3}P) = (-2j)^k A^2.$$

反之, 容易验证当式(12)~(14)成立时, 滤波器组 $\{H_0, H_1, H_2\}$ 是 K 阶正则和 K 阶阻带零点抑制的.

附录 2: 定理 2 的证明

由式(4), $G_2(X) = e^{-2jX} - T_{02}(e^{-3jX}) + T_{12}(e^{-3jX})T_{01}(e^{-3jX}) - e^{-jX}T_{12}(e^{-3jX})$. 因此

$$G_2^{(k)}(\frac{2qP}{3}) = (-2j)^k A^{-2q} - (3j)^k v_{02}(k) + \sum_{p=0}^k C_p^k [(3j)^k \# v_{12}(p) v_{01}(k-p) - (-j)^p A^{-q} (3j)^{k-p} v_{12}(k-p)]$$

$$\text{把式(12)~(14)代入经化简得: } G_2^{(k)}(\frac{2qP}{3}) = (-2j)^k [A^{-2q} - 1 - \overline{A^2} + A^q \overline{A^2}].$$

因此, 对 $k=0, 1, \dots, K-1, G_2^{(k)}(0) = G_2^{(k)}(\frac{2}{3}P) = 0$ 并且

$$G_2^{(k)}(\frac{4}{3}P) = (-2j)^k [2A^2 - A - 1] \quad (15)$$

由式(4)和式(15)的结果,

$$G_1^{(k)}(\frac{2qP}{3}) = (-j)^k A^{-q} (-j)^{k-D(q-2)} \sum_{p=0}^k C_p^k (3j)^p \# (\frac{1}{3})^p \frac{A^2}{1-A} (-2j)^{k-p} (2A^2 - A - 1) = (-j)^k [A^{-q} - 1 - D(q-2)(A-1)]$$

因此, 对 $k=0, 1, \dots, K-1, G_1^{(k)}(0) = G_1^{(k)}(\frac{4}{3}P) = 0$ 并且 $G_1^{(k)}(\frac{2}{3}P) = (-j)^k (A^2 - 1)$.

类似可以得到当式(12)~(14)满足时, 对 $k=0, 1, \dots, K-1$

$$G_0^{(k)}(\frac{2}{3}P) = G_0^{(k)}(\frac{4}{3}P) = 0, G_0^{(k)}(0) = D(k)$$

参考文献:

- [1] Daubechies. Orthonormal bases of compactly supported wavelets [J]. *Comm Pure Appl Math*, 1988, 41: 909- 996.
- [2] C K Chui, J Z Wang. A cardinal spline approach to wavelets [J]. *Proc Amer Math Soc*, 1991, 113: 785- 793.
- [3] C K Chui, J Z Wang. A general framework of compactly supported splines and wavelets [J]. *J Approx Theory*, 1992, 71(3): 263- 304.
- [4] A Cohen, I Daubechies, J Feauveau. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets [J]. *Comm Pure Appl Math*, 1992, 45: 485- 560.
- [5] M Vetterli, C Herley. Wavelets and filter banks: theory and design [J]. *IEEE Trans SP*, 1992, 40(9): 2207- 2232.
- [6] C Herley, M Vetterli. Wavelets and recursive filter banks [J]. *IEEE Trans SP*, 1993, 41(8): 2536- 2556.
- [7] M Unser, P Thevenaz, A Aldroubi. Shift orthogonal wavelets bases [J]. *IEEE Trans on SP*, 1998, 46(7): 1827- 1836.
- [8] W Sweldens. The lifting scheme: a construction of second generation wavelets [J]. *SIAM J Math Anal*, 1997, 29(2): 511- 546.
- [9] W Sweldens. The lifting scheme: a custom design construction of biorthogonal wavelets [J]. *Appl Comput Harmon Anal*, 1996, 3(2): 186- 200.
- [10] A Harten. Multiresolution representation of data: a general framework [J]. *SIAM J Numer Anal*, 1996, 33(3): 1205- 1256.
- [11] Lounsbury, T D DeRose, J Warren. Multiresolution analysis for surfaces of arbitrary topological type [J]. *ACM Trans Graph*, 1997, 16(1): 34- 73.
- [12] P L Shui, Z Bao. Recursive biorthogonal interpolating wavelets and sigma2 adapted interpolating filter banks [J]. *IEEE Trans SP*, 2000, 47(9): 2585- 2594.
- [13] P L Shui, Z Bao. Sigma2 adapted recursive interpolating wavelet packets [J]. *IEEE Trans CAS(II)*, 1999, 46(12): 1525- 1528.
- [14] 水鹏朗, 保铮. 具有稳健边界滤波器的区间内插小波 [J]. *中国科学(E 辑)*, 2000, 30(1): 55- 63.
- [15] J Kovavcevic, W Sweldens. Wavelet families of increasing order in arbitrary dimensions [J]. *IEEE Trans IP*, 2000, 9(3): 480- 496.
- [16] H Ji, Z Shen. Compactly supported (bi) orthogonal wavelets generated by interpolatory refinable functions [J]. *Adv Comput Math*, 1999, 11(1): 81- 104.

作者简介:



水鹏朗 男, 1967 年生, 陕西蓝田人, 教授, 1992 年在南京大学获理学硕士学位, 1999 年在西安电子科技大学获博士学位, 目前主要研究兴趣: 子波理论及其应用, 图象处理和超宽带雷达信号处理.



保铮 男, 1927 年生, 江苏南通人, 教授, 中国科学院院士, 中国电子学会会士, 研究领域为雷达信号处理和信号与信息处理.